MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI
– VI –

Alexandru POPESCU-ZORICA
Cristinel MORTICI
Andrei VERNESCU
Dorin MĂRGHIDANU
Cătălin ȘTERBEȚI
Nicolae TOMESCU
Lucian TUȚESCU

MISTUIRI RĂSCOLITE

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „DANUBIUS”
Edițiile I-VI

Editura SITECH
Craiova

CUPRINS

În loc de prefață 3

Mistuiri răscolite 5

Concursul Danubius – enunțuri 51

Concursul Danubius – soluții 89

Intervenţii pertinente la această masă rotundă au avut şi profesorii: *Lucian Tuţescu* şi *Cătălin Sterbeţi* din Craiova, *Marius Perianu* din Slatina, *Nicolae Bivol* din Corabia, moderatorul acestei reuniuni, *Dorin Mărghidanu*, etc.

Organizatorii au oferit profesorilor şi invitaţilor o minunată croazieră pe Dunăre (în deplin acord cu numele concursului!...).

Ziua de concurs se încheie cu festivitatea de premiere – în sala mare a Casei de Cultură din Corabia, unde sunt prezenţi elevi, profesori, părinţi, invitaţi.

Începând cu două ediţii în urmă, concursul are un caracter zonal-european, fiind invitate şi echipe din Republica Bulgaria.

Prof. Dr. Dorin Mărghidanu

MISTUIRI RĂSCOLITE

Sunt multe regiuni pe sfera „Pământ" care se revendică „leagăn de cultură". În ce mă priveşte, eu localizez în special bazinul mediteranian şi îndeosebi bazinul est-mediteranian. Pitorescul neasemuit al miturilor se alege din diversitatea credinţelor acelor seminţii, trăitoare pe aceste meleaguri, a căror începuturi promulgă existenţa şi după multe mii de ani se aşază în „la mythologie grécque est d'une incomparable beauté", Max Frèdéric Müller, filolog şi mitolog englez de origine germană, 1823-1900.

Geniile contemplatoare s-au cristalizat simultan la începuturile emancipării, cu felurite grade de efervescenţă, prin triumviratul „literatură-artă-ştiinţă". Rostul eseului nostru este orientat către pilonul ce avea să fundamenteze edificiul cunoaşterii, către civilizaţia de astăzi ce se cere păstrată şi continuată, pentru frumuseţea vieţii, pentru cucerirea adevărului, pentru triumful binelui. „Geometrie", cuvânt din limba greacă alcătuit din particula „geo", pământ şi alocuţiunea „metron", măsură.

Caria, o ţară cu existenţă prosperă încă din al patrulea mileniu î.Ch., aşezată pe teritoriul Asiei Mici cu oraşe celebre: Halicarnasse patria lui Hérodote „le Père de l'histoire" (484-425 î.Ch.), astăzi în viaţă pe harta Turciei cu numele „Boudroun", adăposteşte ruinele primului edificiu inserat în salba celor „şapte minuni ale lumii antice". Monumentul are o înălţime de 42 m alcătuit din 36 coloane în stil ionic, surmontat de o piramidă pe care este înălţată statuia lui Mausole, regele Cariei (377-353 î.Ch.) Complexul a fost ridicat în anul următor, 352, sub directa supraveghere a urmaşei, regina Artemiza II.

Milet, port la marea Egee, reprezintă patria lui Thales (624-546 î.Ch.), Anaximandru (610 – 546 î.Ch.), Anaximene (550-480 î.Ch.), precum şi a multor filosofi, scriitori şi oameni de cultură, printre care renumitul geograf şi istoric Hecateu (sec. 6 î.Ch.) şi celebra Aspasia, cea mai frumoasă femeie a acelei lumi, înzestrată cu un spirit de singulară fineţe, ce avea să devină soţia lui Pericle.

Clazomene, astăzi „Vourla", patria lui Anaxagora (510-428 î.Ch.), fondatorul teismului filosofic şi întemeietorul şcolii filosofice de la Atena, ale cărui prelegeri şi lecţii au fost cu asiduitate urmărite de Pericle, Euripide, Socrate.

Cnidos, colonie lacedomoniană consacrată zeiţei Venus, patria lui Eudoxiu (409-356 î.Ch.), inventatorul cadranului solar orizontal, medic şi astronom grec, dar şi geometru, ale cărui reflecţii sunt adunate şi comentate de Euclid, în „Elemente", în cărţile destinate fundamentelor prin postulate, prin rigoarea demonstraţiei ce se strânge în adevăr.

Acest succint periplu antic egeian se împlineşte, se întrepătrunde cu o ţară preponderent insulară, care istoriceşte îşi adjudecă prin colonizare şi părţi din Caria, pe litoralul vest mediteraneean al Asiei Mici: „Ionia".

Începând cu secolele VIII şi VII î.Ch. tribul ionienilor colonizează insulele „Sporadelor centrale" care, în zilele noastre strâng „l'Archipel": Lebedos, Phocée, Chios, Samos, Erythrées, Priène. Concomitent, coloniile s-au extins în lungul Mării Negre. Ulterior, Ionia a suferit dominarea regilor Lydiei, urmată de aceea a regilor Persiei, apoi hegemonia Atenei şi a Spartei, recăzând sub jugul perşilor până la izgonirea acestora de cucerirea romană-secolul I î.Ch.

Partea emancipată şi inteligentă a seminţiei ionice ţine stindardul civilizaţiei, pe care antichitatea greacă o lasă moştenire lumii în domeniile literaturii, filosofiei, artelor, ştiinţei şi pe această temelie se ridică civilizaţia contemporană.

Începutul conceptelor geometrice în zona bazinului mediteranean, Herodot îl aşează la finele mileniului IV î.Ch. Acest neobosit călător s-a informat de la astrologi, preoţi, învăţaţi şi selectând cu discernământ datele adunate, şi-a binemeritat eternizarea cu recunoaştere unanima „le Père de l'histoire".

Geometria s-a constituit din nevoi practice, specialiştilor vremii le-am spune astăzi „ingineri în arpentaj şi agrimensură". Revărsările Nilului pustiau întinderi mari în forme neregulate cu variaţiuni dependente de relieful locului. Odată cu retragerea apelor se puneau probleme de măsurare, de resortul arpentajului.

Se atribuie astfel Egiptenilor şi Caldeenilor primele încercări de coordonare a ideilor geometrice. Următor lui Herodot, Aristotel fixează Egiptul ca leagăn al geometriei la origini, după care a trecut în Grecia.

De la Platon (430-349 î.Ch.) datează avântul Geometriei în Grecia. Acest mare savant şi-a început instruirea pe lângă preoţii egipteni, apoi în Italia pe lângă Pitagoricieni, coleg cu Arhitas din Tarent, elevi ai lui Teodor din Arene(480-400 î.Ch.). Reîntors la Atena a introdus în ştiinţa filosofiei, metoda analitică, în geometrie, teoria secţiunilor conice şi doctrina locurilor geometrice. Se crea astfel o geometrie nouă care la acea epocă se numea „geometria transcendentă". Ca şef al liceului, ilustrul filosof şi geometru, la poarta şcolii sale aşează inscripţia „Que nul n'entre ici, s'il n'est géometre" şi Aristotel(384-322 î.Ch.) a păşit pragul acestei renumite şcoli.

Antichitatea pronunţă în istoria civilizaţiei următoarele mari centre de cultură matematică:

Şcoala ionică, fondator Thales, sediul Milet
Şcoala italică, fondator Pytagora, sediul Caotona
Şcoala greacă, fondator Platon, sediul Atena
Şcoala alexandrină, fondator Euclide, sediul: Alexandria

Teismul filozofic, elaborat şi fundamentat de Anaxagora aparţine şcolii ionice şi se constituie din

apa-pentru Thales
infinitul-pentru Anaximandru
aerul-pentru Anaximene.

Şcoala de la Alexandria, cea mai longevivă, aproape o mie de ani, 300 î.Ch. – 638 d.Ch., anul cuceririi arabe. Se mistuia în anul 641 d.Ch. în flăcările incendierii celebrei biblioteci, sub ochii Califului Omar care orchestra cel mai barbar act de sălbăticie şi cruzime, consemnat de istorie, asupra civilizaţiei lumii, când invazia arabă a lipsit posteritatea de opere, dintre care multe, foarte multe n-au mai putut fi restaurate.

Când secolele s-au mai consumat, lumea arabă a mai dat câteva „scăpărări" împrăştiate printre dune de nisip cu adunare la Bagdad (secolul IX), şi istoria reţine unele contribuţii, însă multe dintre ele rămân incerte in privinţa paternităţii, fiind sustrase din „manuscrise dispărute".

Să trecem la subiectul ce ne-am propus a-l cerceta pentru restaurare!

•
• •

Incursiunea noastră traversează o mie opt sute de ani şi o viaţă medie (!), prin cercetările a trei corifei, aferente aceleiaşi probleme:

Archimède, 287-212 î.Ch., a activat în Syracuza
Tabit ibn Kora, 826-901, a activat in Bagdad
Johann Kepler, 1571-1630, a activat in Praga.

Euclide, 320-270 î.Ch., fondatorul şcolii din Alexandria. Iniţiat, elev la şcoala lui Platon, este atras către anul 290 î.Ch. in Egipt, la Alexandria, devenită capitală sub domnia întemeietorului „dynastie des Lagides", Ptolemeu I Soter (salvatorul), strălucit general şi aghiotantul apropiat al lui Alexandru cel Mare, cel mai fericit urmaş al ilustrului cuceritor. Sub domnia lui (323-283 î.Ch.). Alexandria devine centrul de cultură al lumii antice împlinită prin sosirea tânărului savant.

In anul 285 î.Ch. apar „Elementele". Cartea de ştiinţă, care a traversat veacurile, fiind tradusă şi comentată în toate limbile, a fost şi rămâne carte de iniţiere şi învăţătură pentru şcolile de matematică ale tuturor ţărilor lumii. Profesor şi mentor al prinţului moştenitor, devenit regele Ptolémée II Philadelphe sub a cărui domnie (285-247 î.Ch.). Alexandria atinge şi rămâne pentru mulţi ani centrul de atracţie al minţilor celor mai luminate. Sub această domnie s-a construit „Farul de la Alexandria", a treia minune a lumii antice şi geometria arhitecturii acestei construcţii gigantice (avea o bătaie de 100 mile marine) a fost proiectată, calculată de marele savant.

Redactarea „Elementelor" este ferită de trivialităţi şi demonstraţiile riguroase ale celor mai multe propoziţii păreau şi par şi astăzi complicate pentru începători.

În anii de instruire ai viitorului rege, când Euclide îi era preceptor, legenda povesteşte despre rugămintea tânărului neiniţiat de a i se uşura întrucâtva dificultăţile demonstraţiei. Răspunsul lui Euclide „Seigneur il n'y a pas en Géométrie de chemin particulier pour les rois".

„Elementele” înmănunchează 13 cărți dintre care primele șase și ultimele trei cărți sunt aferente în exclusivitate geometriei. Celelalte patru cărți se raportează la calculul cu mărimi. Printre acestea, toate identitățile algebrice fundamentale sunt abordate sub formă areolară.

„Problemele celebre” fuseseră elaborate: duplicarea cubului, cuadratura cercului, trisecțiunea unghiului, la care Euclide adaugă: postulatul paralelelor, construcția poligoanelor regulate sinonimă cu împărțirea cercului cu rigla și compasul într-un număr prim de arce egale, existența poliedrelor regulate și altele.

Chios, insulă din grupul Sporadelor centrale, este patria lui Homer și a lui Hippocrate (490-410 î.Ch.), celebru prin cuadratura ”lunulelor” și contemporanul său Arhitas din Tarent, instruit pe lângă Pitagoricieni, istoricește sunt reținuți ca eminenți succesori ai lui Pythagore, împlinind tranziția de la Pythagore la Platon. Hippocrate a extins teorema Pitagora la triunghiul oarecare și a redus problema duplicării cubului la construcția a două medii proporționale:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y} \text{ și } \frac{x}{z}=\frac{y}{2a},$$

a fiind lungimea muchiei, și x lungimea muchiei cubului duplicat:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = ay \Rightarrow x^4 = a^2y^2 \\ y^4 = 2ax \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 = 2a^3.$$

Se întâmplau în jurul anului 440 î.Ch.

Samos avea poziție dominantă în „Archipel", patria lui Pitagora, patria lui Aristarh (310 - 230 î.Ch.), astronom grec, care a activat la Alexandria, contemporan și prieten apropiat lui Euclide.

Aristarh cunoștea relațiile de ordine dintre arc și funcțiile trigonometrice pentru arcele din intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, respectiv unghiurile ascuțite. Stabilise formulele pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice, abordează triunghiurile sferice, fiind socotit deschizător de drumuri pentru trigonometria sferică ce avea să fie desăvârșită după patru sute de ani de către Claudiu Ptolemeu care a activat tot la Alexandria.

Eudoxiu, după ce s-a instruit pe lângă pitagoricieni, s-a reîntors în Grecia, activând la Atena.

A fost elevul preferat al lui Aristarh. Este citat de Archiméde ca autor al evaluării volumelor piramidei, conului și trunchiurilor respective. A profesat la școala creată de Platon avându-i ca elevi pe frații Menecmus și Dinostrate care au abordat problema trisecțiunii și problema cuadraturii cercului: construcția cu rigla și compasul a pătratului a cărui arie este egală cu aria unui cerc dat. Precursori lui Euclide, toate acestea sunt inserate în cărțile 9, 10 și 13 ale Elementelor.

Elementele nu conțin măsura circumferinței cercului: această descoperire capitală era rezervată lui Archimède.

Construcția poligoanelor regulate a fost abordată de Archimede și după facilele cazuri: n = 4, n = 6, n = 3, ceva mai serioase au fost cazurile n = 10, n = 5 iar n = 15 încheie strădaniile antichității în timp ce evul mediu rămâne lipsit de glorie, în această privință.

Toate problemele celebre și altele la fel de celebre, impuse de rostul matematicilor aplicate, și - au aflat rezolvarea definitivă, deci au fost „închise" pe parcursul secolului al XIX-lea.

Euclide este o „făptură” în eternitate. Păcat că n-a mai zăbovit printre semenii săi. Avea să se destăinuie unei alte lumi!?

În ce-l privește pe Archimede, toți avizații consemnează „le plus grand mathematiciens de l'antiquité”[1] și o apreciere ceva mai recentă, finele anilor 50 ai secolului XX, privitor la opera lui Archimede „et par une fortune singuliere, nous sommes a même de lire encore dans son texte original, dans le sonore dialecte dorien ou il les avait și soigneusement ridiges, la plupart de ses êcrits, et jusqu'a celui, retrouvé récement, où il expose les procèdés „heuristiques” par lesquels il a été à quelques-uns de ses plus beaux résultats” precum și aprecierea de revenire la matcă.

„Ce ne sont plus de tels scrupules en tout cas qui arrêtent les mathèmaticiens du XVIIe siècle, lorsque, devant les problèmes nouveaux qui se pose en foule, ils cherchent dans l'étude assidue des écrits d'Archimède les moyens de le dépasser”[2].

Steaua „Ionică” a ajuns prea degrabă la culminație, fluctuațiile politice au făcut-o să pălească după un veac de existență, în timpul generației lui Anaxagore. Zenitul Miletului purtase efemer o supernovă, a cărei strălucire îi conferea non statutul de stea căzătoare. Avea destinul de stea călătoare și magul ei, Pythagora. După lungi peregrinări în Egipt, ținuturile Asiei Mici, prin vechile așezăminte caldeene până spre îndepărtatele ținuturi ale Indiilor, a pornit-o spre apus, o vreme a poposit în Sicilia și continuând călătoria ajunge în Italia meridională, ținuturi care în epocă constituiau „la Grande - Grèce”. Crotone devine sediul școlii italice, fondată de Pythagora către 509 î.Ch. Personaj emblematic, enciclopedii de prestigiu rămân reținute: „philosophe et mathématicien grèc du VIe s. av. J. C dont l'existence est très problematique. Il serait né à Samos, et aurait fondè la secte des pythagoriciens”.

Teorema care i-a fixat celebritatea reactualizată in geometria superioară a spațiilor cu încărcătură modernă, se pare că a demonstrat-o prin descoperire, cu procedeu areolar, când încă nu părăsise ținutul natal.

După unii istorici, trăirea sa a depășit simțitor rarul o sută de ani.

Comentatori romani, filosofi și matematicieni îl menționează în viață în epoca anilor 480 î.Ch.

[1] Eugene Rouche, *Notions Historiques*, Paris 1858
[2] Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Ed Hermann 1958, France

Am amintit de Sicilia, la acea vreme cu sentimente procartagineze. După mai bine de două sute de ani, se năştea la Syracuza, ARCHIMÈDE – 287 î.Ch.

„La secte des pythagoriciens" se rărea, se pierdea estompându-se in amintire. E posibil ca primii preceptori ai copilului genial să fi fost instructori trecuţi pe la Crotone. Tânărul Archimede nu împlinise şaptesprezece ani când ajungea la Alexandria, Euclide trecea în eternitate, cărţile „Elementelor" şi tratatul „Données" (mistuit în incendiul din 641 d. Ch.), a parvenit posterităţii prin judicioasele comentarii din „Collections Mathématiques" ale lui Pappus (320-395 d. Ch. renumit matematician grec, a activat la Alexandria). Acesta le-a parcurs cu interesul unor înclinări singulare (în special cărţile 7, 8, 9, 10 ale „Elementelor"), aplecat asupra lui Eudoxiu, discipolul preferat al lui Platon, pe care Archimède îl citează ca autor al „măsurii" piramidei şi conului. Lucrările lui Archimède se raportează cu precădere „à la Géométrie de la mesure". Calea urmată pentru demonstrarea adevărurilor matematice nebănuite până atunci constituie „la Méthode d´exhaustion"care conţine în germene „la Méthode des limites"-faţă de care am citat aprecierile colectivului Bourbaki.

După anul 260 î.Ch. revine la Syracuza, pe care n-o mai părăseşte, devine fizicianul şi matematicianul care zeifică antichitatea, rămâne simbolul care înnobilează facerea Domnului, în cea mai pură înfăptuire după chipul şi asemănarea divină.

Problema „construirea poligoanelor regulate" cu $n=3$, $n=2^m \cdot 3$ supusă „măsurii" care l-a condus pe Archimède la descoperirea numărului ce-i poartă numele, l-a preocupat şi pentru $n=7$, heptagonul regulat, manuscris pierdut, menţionat într-un comentariu semnat de Tabit Ibn Kora(826-901, învăţat arab, a activat la Bagdad).

Latura l a heptagonului regulat înscris în cercul unitate verifică ecuaţiile:

$x^3+1=x^2+2x$, $x=l^2-2$, reţinute ca „formulele lui Kora".

Istoria reţine şi rezultatele lui Johann Kepler, care independent de „cercetările" lui Tabit Ibn Kora finalizează chestiunea în formă echivalentă, cu sprijin pe formulele lui François Viéte (1540-1603), ridicătorul cortinei spre „Renaştere", în matematică.

În Gazeta Matematică, în volumele anilor 50, sunt multe scrieri autorizate cu privire la evoluţia matematică a secolelor antichităţii şi a celor ce au urmat.

„Padre" al celor însufleţiţi era legendarul Ion Ionescu.

Toate aceste contribuţii erau atunci tot atâtea îndreptare pentru posteritate, pentru cei de astăzi pe care vremea i-a ajuns, pentru cei de mâine când vremea le va sosi. Căutătorii găsesc şi vor găsi desluşiri, când manuscrisele devin documente de arhivă, din ce în ce mai dificil de abordat.

În finalul acestui eseu voi comite un înconjor prin care mă voi explica sentimental şi raţional pentru toată reconstituirea ce urmează.

„ Sinus" este cuvânt de origine latină, cu reflecţii în anatomie, botanică, matematică, semnifică o „cavitate" şi cavitate este segmentul circular.

În matematică este legat de frontiera liniară a acestei cavităţi.

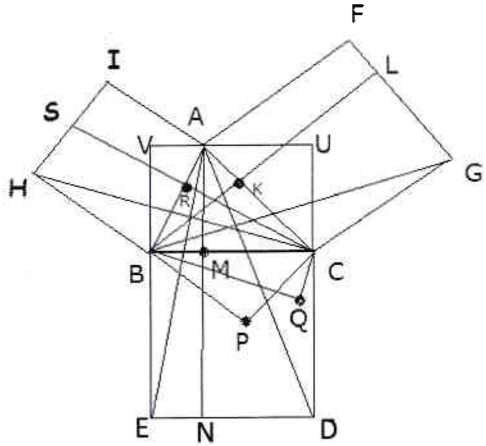
Învăţatul indian, Ariabhata din Pataliputra (476-550), inspirat din geometria Antichităţii a introdus „sinusul", ca jumătatea coardei ce subîntinde arcul măsurat în grade hexagesimale şi simbolizat „$\sin\alpha$", 2α fiind măsura arcului subîntins de coardă. Cosinusul aceluiaşi arc, simbolizat „$\cos\alpha$", este apotema coardei.

Creaţia indiană a trigonometriei a trecut în ţarile de origine arabă, transcrisă în versiune definitivă de Albategrius (858-929), cel mai luminat învăţat al şcolii de la Bagdad (Abu Abdulah Muhamed ibn Jaber ibn Sinan al Batani), supranumit „le Ptolémée arabe".

Germenii veneau din Antichitate, in principal de la Hippocrate, Aristarh, Hipparque din Niceea (190-125 î.Ch.), cel mai mare astronom al antichităţii, veritabilul fondator al Astronomiei Matematice, inventatorul Trigonometriei rectilinii (plane) şi sferice, şi după Hristos, Claudiu Ptolemeu (85-165), astronom şi geometru „du plus grand savoir", autorul tratatului „Almageste" (în limba arabă acest titlu are semnificaţia de „foarte mare"). Almagestul rămâne veritabilul Tratat de Trigonometrie rectilinie şi sferică, asupra căruia s-au aplecat Ariabhata Al Batani şi contemporanii lor.

Hippocrate a enunţat şi demonstrat „Teorema Pitagora generalizată", inserată în „Elemente", cartea a VIII^a:

Pătratul laturii unui triunghi este mai mic, egal sau mai mare decât suma pătratelor celorlalte două laturi, după cum unghiul opus este ascuţit, drept sau obtuz. Diferenţa este egală cu de două ori produsul uneia din cele două laturi prin proiecţia celeilalte pe ea.



$\sphericalangle BAC \angle 90°$. Se construiesc pătratele BCDE, CAFG, ABHI.

$\Delta BCG = \Delta DCA$ şi $\Delta CBH = \Delta EBA$:

aria BCG=$\frac{1}{2}\overline{CG}\cdot\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{CG}\cdot\overline{CK}=\frac{1}{2}\overline{AC}^2-\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AK}$

aria DCA=$\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{AU}=\frac{1}{2}CD\cdot CM$

aria CBH=$\frac{1}{2}BH\cdot CQ=\frac{1}{2}BH\cdot BR=\frac{1}{2}\overline{AB}^2-\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AR}$

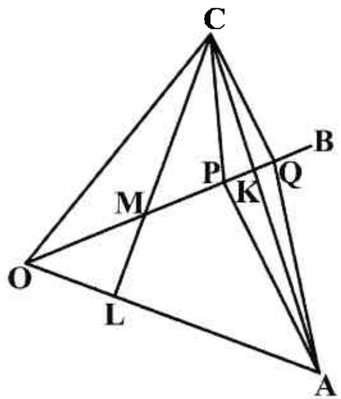
aria EBA=$\frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\overline{AV}=\frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\overline{BM}$

$\Rightarrow \overline{BC}^2$=aria BCDE=2 aria DCA + 2 aria EBA=$\overline{AC}^2-\overline{AC}\cdot\overline{AK}+\overline{AB}^2$ $-\overline{AB}\cdot\overline{AR}$ și $\overline{AK}$ este proiecția lui $\overline{AB}$ pe AC, $\overline{AR}$ este proiecția lui $\overline{AC}$ pe $\overline{AB}$
.

Pentru ∢BAC ascuțit, K este între A şi C, R este între A şi B.
Asemănarea triunghiurilor KAB~ RAC=> $\overline{AK}, \overline{AB}$

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AC}\cdot pr_{AC}\ \overline{AB}=AB^2+AC^2-2\overline{AB}\cdot pr_{AB}\cdot\overline{AC}$

Cand ∢BAC > 90^0, A este intre K şi C, A este între R şi B, și teorema este demonstrată. Semneaza: Hippocrate.
„Desfacerea” funcțiilor sinus și cosinus pentru suma a două arce, pentru diferența a două arce, arcele aparținând, cum am spune astăzi, intervalului $(0, \frac{\pi}{2})$ le reproduc, le refac, patru stări independente, aşa cum le-a învățat Arhimède, studiind „Elementele”.



∢AB=α, ∢BC=β, AP= $\sin\alpha$, OS= $\cos\alpha$, CQ= $\sin\beta$, OQ= $\cos\beta$, CL=$\sin(\alpha+\beta)$, OL= $\cos(\alpha+\beta)$

$\Delta AKP\sim\Delta CKQ \Rightarrow \frac{AK}{CK}=\frac{KP}{KQ}$ => aria AKQ= aria CKP

Aria ORQ=$\frac{1}{2}$ AP$\cdot$OQ = $\frac{1}{2}$ $\sin\alpha\cos\beta$= aria AKQ +aria OAK

Aria OCP=$\frac{1}{2}$ OP$\cdot$CQ = $\frac{1}{2}$ $\cos\alpha\sin\beta$= aria OCK –aria CKP

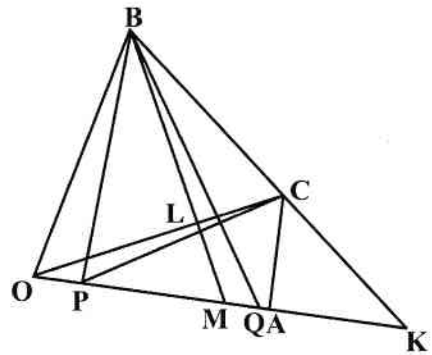
Aria OAC= $\frac{1}{2}$ OA $\cdot$ CL= $\frac{1}{2}$ $\sin(\alpha+\beta)$= aria OAK + aria OCK

Din care rezulta: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\Delta OPA\sim\Delta CQM \Rightarrow \frac{OP}{CQ}=\frac{AP}{MQ}$ =>OP(OQ-OM)= AP·CQ,

$\cos\alpha\cos\beta$-OP$\cdot$OM=$\sin\alpha\sin\beta$

$\Delta OLM\sim\Delta OPA \Rightarrow \frac{OL}{OP}=\frac{OM}{OA}$, OL$\cdot$OA=OP$\cdot$OM=$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, adică $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$



$\overset{\frown}{AB}=\alpha$, $\overset{\frown}{AC}=\beta$, BP=$\sin\alpha$, OP=$\cos\alpha$, CQ=$\sin\beta$, OQ=$\cos\beta$, BL=$\sin(\alpha-\beta)$, OL=$\cos(\alpha-\beta)$

$\Delta BKP\sim\Delta CKQ \Rightarrow \frac{BK}{CK}=\frac{KP}{KQ}\Rightarrow$ aria BKQ = aria CKP

Aria OBQ=$\frac{1}{2}$ BP$\cdot$OQ=$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta$ = aria OBK – aria BKQ

Aria OCP=$\frac{1}{2}$OP$\cdot$CQ=$\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\beta$ = aria OCK – aria CKP

Aria OBC=$\frac{1}{2}$OC$\cdot$BL=$\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$= aria OBK – aria OCK,

din care rezulta: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\Delta OQC \sim \Delta BPM \Rightarrow \frac{OQ}{BP} = \frac{CQ}{MP}$, OQ(OM-OP)=BP · CQ

OQ · OM - $\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta$

$\Delta OLM \sim \Delta OQC \Rightarrow \frac{OL}{OQ} = \frac{OM}{OC}$, OL · OC=OQ · OM=$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, adică

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ Semnează: Euclide

k, prim cu n, $1 \le k \le [\frac{n}{2}]$, cercul marcat cu punctele care separă „n" arce egale, punctele unite din k în k, k=1 construiește poligonul convex regulat de ordinul n. Celelalte sunt poligoane concave, poligoane stelate regulate de ordinul „n", în total ½ $\varphi(n)$ poligoane, $\varphi(n)$ este funcția indicatorului.

$l_{k,n}$ este lungimea laturii poligonului rezultat de ordinul „n" și „indice k".

$a_{k,n}$ este apotema acestui poligon.

Pentru cercul unitate, $l_{k,n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}, a_{k,n} = \cos\frac{k\pi}{n}$.

n=7. Trei heptagoane regulate, unul convex, doua stelate: $l_{1,7}, l_{2,7}, l_{3,7}$.

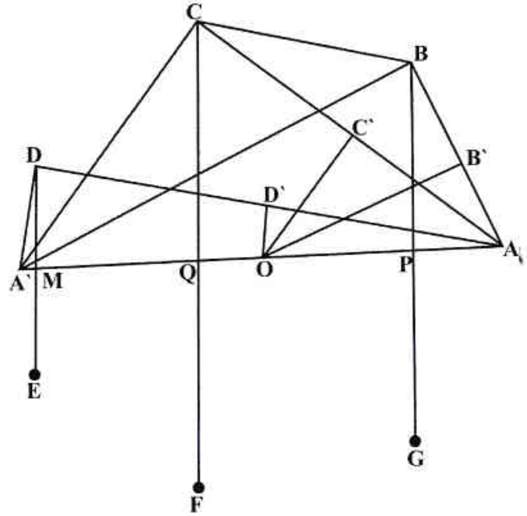
$AB = l_{1,7}, AC = l_{2,7}, AD = l_{3,7}$

$A'B = l_{5,14}, A'C = l_{3,14}, A'D = l_{1,14}$

$OB' = a_{1,7}, OC' = a_{2,7}, OD' = a_{3,7}$

$A'B = 2a_{1,7}, A'C = 2a_{2,7}, A'D = 2a_{3,7}$

$\widehat{AC} = \frac{4\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}l_{3,7} = \sin\frac{3\pi}{7}$



Pentru cercul de rază OA=R, aria OAB=$\frac{OA \cdot BP}{2} = \frac{AB \cdot OB'}{2} \Rightarrow l_{1,7} \cdot a_{1,7} = \frac{R}{2} l_{2,7}$

Aria OAC=>$l_{2,7}a_{2,7} = \frac{R}{2}l_{3,7}$; aria OAD=>$l_{3,7} \cdot a_{3,7} = \frac{R}{2}l_{1,7}$

Cu formulele lui Euclide se obține consecutiv:

$\sin\frac{3\pi}{7} = \sin(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}) = \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} \Rightarrow Rl_{3,7} = l_{1,7}a_{2,7} + l_{2,7}a_{1,7}$ și

$\sin\frac{\pi}{7} = \sin(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{7}) = \sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} \Rightarrow Rl_{1,7} = l_{2,7}a_{1,7} - l_{1,7}a_{2,7}$

prin diferență:

$$R(l_{1,7} - l_{3,7}) = -2l_{1,7}a_{2,7}$$

$\sin\frac{2\pi}{7} = \sin(\frac{3\pi}{7} - \frac{\pi}{7}) = \sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} \Rightarrow Rl_{2,7} = l_{3,7}a_{1,7} - l_{1,7}a_{3,7}$ și prin

$\sin\frac{4\pi}{7} = \sin(\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi}{7}) = \sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} \Rightarrow Rl_{3,7} = l_{3,7}a_{1,7} + l_{1,7}a_{3,7}$

diferența:

$$R(l_{1,7} - l_{2,7}) = 2l_{1,7}a_{3,7}$$

se asociază $Rl_{2,7} = 2l_{1,7}a_{1,7}$

Sumarea acestor trei egalități, stabilește „relația apotemelor regulate"

$$a_{1,7} - a_{2,7} + a_{3,7} = \frac{R}{2} \quad (1)$$

Revenind la cercul unitate, triunghiurile dreptunghice ABA', ACA', ADA' stabilesc consecutiv: $AB^2 = AA' \cdot AP, AC^2 = AA' \cdot AQ, AD^2 = AA' \cdot AM$ adică:

$l_{1,7}^2 = 2(1-a_{2,7}), l_{2,7}^2 = 2(1+a_{3,7}), l_{3,7}^2 = 2(1+a_{1,7})$ respectiv:

$l_{1,7}^2 + l_{2,7}^2 + l_{3,7}^2 = 7$ (2) și $7R^2$, in cercul de rază R.

Se notează: $2a_{1,7} = x_1, -2a_{2,7} = x_2, 2a_{3,7} = x_3 \Rightarrow l_{1,7}^2 = 2 + x_2, l_{2,7}^2 = 2 + x_3, l_{3,7}^2 = 2 + x_1$

$\Delta ABA' \Rightarrow l_{1,7}^2 + 4a_{1,7}^2 = 4; \Delta ACA' \Rightarrow l_{2,7}^2 + 4a_{2,7}^2 = 4; \Delta ADA' \Rightarrow l_{3,7}^2 + 4a_{3,7}^2 = 4$

Cu aceste notații, urmează:

$x_1^2 = 2 - x_2, x_2^2 = 2 - x_3, x_3^2 = 2 - x$, legături care se închid în sistem ciclic.

Relația(1) se transcrie: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, stabilind „ecuația apotemelor”:

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 1 - 2x_3 + x_3^2$

$x_1^2 + 2 - x_3 + 2x_1x_2 = 1 - 2x_3 + 2 - x_1$

$x_1^2 + x_1 + x_3 - 1 = -2x_1x_2$

$x_1^2 - x_2 = -2x_1x_2$

și cum $-x_2 = x_1^2 - 2 \Rightarrow -x_1x_2 = x_1^2 - 1$.

$x_1^2 = 2 - x_2 \Rightarrow x_1^3 = 2x_1 + x_1^2 - 1$, adică ecuația apotemelor heptagoanelor regulate

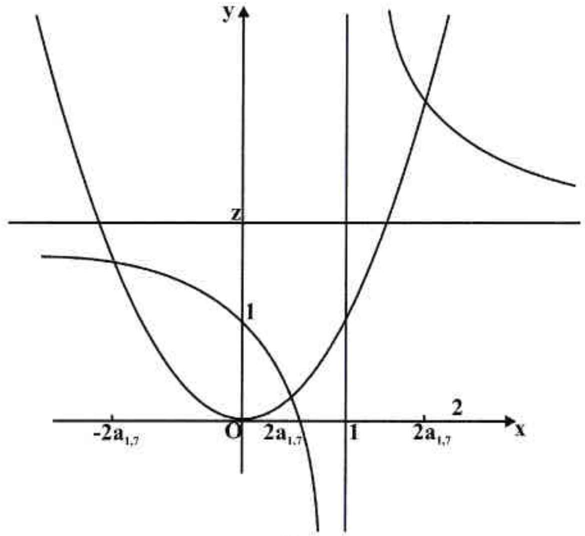
$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (3),$$

două rădăcini pozitive și o rădăcină negativă: $0 < x_3 < -x_2 < x_1$.

$x = l^2 - 2$ repartizează heptagoanele regulate: $l_{1,7}^2 = 2 + x_2 < l_{2,7}^2 = 2 + x_3 < l_{3,7}^2 = 2 + x$.

Rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației (3) sunt abscisele punctelor de intersecție ale parabolei

$x^2 = y$ cu hiperbola $\quad y = \dfrac{2x-1}{x-1}$:



In oricare cerc: $\dfrac{l_{2,7}}{l_{1,7}} - \dfrac{l_{3,7}}{l_{2,7}} + \dfrac{l_{1,7}}{l_{3,7}} = 1$ (4), iar în cercul de raza R:

$a_{1,7}^2 + a_{2,7}^2 + a_{3,7}^2 = \dfrac{5R^2}{4}$ (5).

Semnează: Archimède

Alexandria, 270 î.Ch.

Practica abordării ecuațiilor de gradele 3 și 4, prima prin intersecția parabolă- hiperbolă, cea de a doua prin intersecția a două parabole, venea de la Școala lui Platon care inițiase și perfecționase doctrina „locurilor geometrice”. Creatorul fusese Hippocrate, care mânuia cu profundă ingeniozitate această doctrină, o arătase atunci când problema duplicării cubului, ce venea din adâncimile milenarelor mitologice, o transferase la construirea a două medii proporționale, în fond, intersecția a două parabole

$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax, \end{cases}$ ecuații „metric omogene”

Școala de la Atena emancipase și intersecția parabolei $x^2=y$ (în serviciul duplicării oricărui cub), cu hiperbola $xy=2a^3$, și cele două procedee se pot unifica într-un comentariu actual: „originea și un punct impropriu ce corespund”. Cu acest aforism proiectiv cele două sisteme concură în soluția reală unică: parabolele au în comun originea, soluție respinsă și două intersecții, puncte imaginare; parabola și hiperbola au în comun punctul impropriu (0, 1, 0), soluție respinsă și două intersecții, puncte imaginare. Al patrulea punct comun, cu aceeași absciscă pentru ambele variante, marchează prin abscisă muchia cubului duplicat.

Intersecția parabolă-hiperbolă, propusă de Archimède, pentru „împărțirea cercului în șapte arce egale”, aruncă al patrulea punct comun în punctul impropriu (0, 1, 0)

Linia dreaptă și cercul sunt liniile plăcute ochiului și mișcării, însoțitoare ideale ale vieții, au înconjurat firul cu plumb și rotundul, impunând rigla și compasul în rezolvarea problemelor de „construcții geometrice”.

Originea problemelor celebre, a celor mai multe, este de factură mistică și tot astfel este abordarea lor infructuoasă, dar urme consistente au lăsat doar două școli: Școala lui Platon și Școala de la Alexandria.

Acestea au devenit posibile și demne de reținut, doar atunci când renunțându-se la obligativitatea folosirii liniilor ideale s-a acceptat și serviciul altor linii, făurite prin doctrina locurilor geometrice. Preeuclidian rămân urmele eminenților frați Menocmus și Dinostrate, străluciți discipoli ai lui Eudoxiu, îngeri luminați ai școlii ateniene; posteuclidian au traversat și traversează veacurile liniile lui Nicomède și Diocles, în sinteza Dumnezeului lor, al tuturor celor de atunci, izvor de har și înțelepciune cu nume pământean: Archimède.